Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie, 2015

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Există funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care admit primitive și $F(f(x)) > \frac{1}{x}$ pentru orice $x > 0$, unde F este o primitivă a funcției f ?

b) Fie $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și fie $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Arătați că funcția $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = xf(x)$ admite primitive pe $(0, +\infty)$ și determinați funcțiile f, F care verifică relația $xF(x) = (x + 1)G(x)$ oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$,unde G este o primitivă a funcției g.

Problema 2.

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și funcția $f: [a\,, b] \to \mathbb{R}$ având proprietatea Darboux. Să se arate că dacă pentru orice $y \in f([a\,, b])$ mulțimea $f^{-1}(\{y\})$ este un interval atunci funcția f este monotonă.

Problema 3.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. O matrice $A \in M_{2^n-1}(\{-1; 1\})$ se numește câștigătoare dacă și numai dacă fiecare element este egal cu produsul elementelor cu care este vecin pe orizontală și verticală. Determinați numărul matricelor câștigătoare din mulțimea matricelor pătratice de ordin $2^n - 1$ cu coeficienți în mulțimea $\{-1; 1\}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 2 ore 30 min